

面向中国数学教育的信息技术

左传波

e-mail: chbzuo@yahoo.com.cn

广州大学计算机教育软件研究所, 广州, 中国

摘要

动态几何工具在数学教育中的价值在过去几十年间得到了广泛的认可,然而由于中国内地应试教育问题严重,绝大多数中学数学教师都面临着沉重的工作负担,无暇顾及在提高学生成绩方面起不到立竿见影作用的动态几何软件。

在过去 10 多年间,本文作者在中国内地一直从事数学教育软件的设计、资源开发、在职教师的数学软件培训和技术咨询工作。从作者长期在一线工作的经验出发,本文详细地介绍了中国内地信息技术运用于数学教育的现状。并从数学软件自身的角度出发,分析了一般动态几何工具软件得不到广泛和深入应用的几点原因。

本文继而介绍了中国科学家们自己开发的动态数学软件--Z+Z 智能教育平台《超级画板》(以下简称超级画板),以及它在中国的应用情况。通过超级画板的应用实验工作所取得的成果,作者得到的结论是为一个地区所设计和开发的数学教育软件应充分考虑该地区数学教育的实际情况以及教师和学生的各种需要。

1. 数学软件在中国内地的应用状况及原因分析

就像我们大家所了解的那样，利用动态几何软件构造出的几何图形，在图形变化过程中几何性质保持不变。在动态几何软件中，学生可以进行作图、测量以及动手操作，探索图形之间的数学关系，提出猜想并进一步进行验证，从而进行更深一层的探究。利用动态几何软件绘制的带有参数的函数曲线，在参数改变过程中，曲线的性质同时发生变化，能够帮助学生理解与发现各种参数对函数曲线的意义。动态几何软件在数学教育中所起到的积极作用和价值，在过去几十年得到了全世界范围内的公认。例如中国内地在 1996 年由人民教育出版社引入的几何画板 (GSP, 见 [1]) 在许多国家和地区都受到不同程度的欢迎和应用。在中国内地 (以下称中国地区) 除了 GSP 之外，被许多数学教师所熟悉的从国外引进的动态几何工具还有 Cabri-Geometry (见[2]) 和 GeoGebra (见[3]) 等等。

然而我们发现，动态几何软件在中学阶段的使用情况并不像早些年前数学教育专家和教育部门的官员所期望的那样乐观。我们发现：

(1) 大部分数学教师平时仍然采用他们所熟悉的黑板加粉笔式的传统教学手段，这让他们的课堂教学过程更加得心应手。而当讲公开课或者示范课时，会有许多数学教育的同行来听课或观摩，数学教师们大多会选择使用 PowerPoint 播放预先准备好的内容，而不是更加适合数学教学的动态几何软件。

(2) 在经济发展较快的地区，数学教师在日常教学活动中使用计算机的频率会高一些，而选择使用动态几何软件作为日常教学工具的频率依然非常低。

(3) GSP 是中国地区使用人数最多的动态几何软件之一，网站[4]、[5]吸引和培养了许多使用 GSP 的高手。但是，对于一般的数学教师来说，他们还难以利用 GSP 根据自己的教

学设计开发出对应的教学课件。当上课需要时，首先想到的是从网上下载，若搜索不到则干脆放弃在课堂上使用 GSP。

(4) 数学教师使用动态几何软件的主要目的是展示几何图形，很少有数学教师能够熟练地利用动态几何软件指导学生进行数学学习和数学探究活动。

我们认为产生这些情况的主要原因是：

(1) 中国的数学教育虽然取得了一些成就，同时也面临着一些问题。其中最大的问题就是应试教育。升学考试是学校教育的指挥棒，考试考什么学校就教什么。因此学生需要进行重复的训练，否则他们可能无法在考试中取得满意成绩。学生的考试压力大，教师的教学任务重，一般的数学教师很难抽出大量的时间学习数学软件。虽然一般老师认同动态几何软件在数学教育中的价值，但是他们不愿意学习和研究它，因为他们认为动态几何软件在提高数学成绩方面没有立竿见影的作用。

(2) 数学教师在日常的教学活动中，除了需要画几何图形、函数图像之外，还需要大量的数值演算和公式推导，如下图 1、图 2 所示，求幂的值或者展开多项式。那么，数学教学和数学学习需要求助于动态几何软件之外的计算机代数系统才能完成任务。

$$\begin{aligned}5^3 &= 125; \\50^3 &= 125000; \\500^3 &= 125000000; \\3^5 &= 243; \\3^{50} &= 717897987691852588770249; \\3^{500} &= 363602917958699368423852670795433191180233850260016230403460358325 \\&8060019158389548419850826297938878330817970253440385575285593151701 \\&3066142992430916562025780021771247847643450125342836565813209972590 \\&371590152578728008385990139795377610001;\end{aligned}$$

图 1：求幂的值

$$\begin{aligned}(a+2b)^2 &= a^2+4ab+4b^2; \\(a+2b)^3 &= a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3; \\(a+2b)^4 &= a^4+8a^3b+24a^2b^2+32ab^3+16b^4; \\(a+2b)^5 &= a^5+10a^4b+40a^3b^2+80a^2b^3+80ab^4+32b^5; \\(a+2b)^6 &= a^6+12a^5b+60a^4b^2+160a^3b^3+240a^2b^4+192ab^5+64b^6; \\(a+2b)^7 &= a^7+14a^6b+84a^5b^2+280a^4b^3+560a^3b^4+672a^2b^5+448ab^6+128b^7;\end{aligned}$$

图 2：多项式展开

再例如，概率和统计是近年来中国数学课程改革后在中学阶段新增加的内容。为了帮助学生建立起概率和统计的基本概念，在课堂教学时间紧张的情况下利用计算机进行模拟实验的过程则是非常重要的，如图 3 所示。因此数学教师还必须掌握具有动态模拟随机事件功能的数据处理软件。

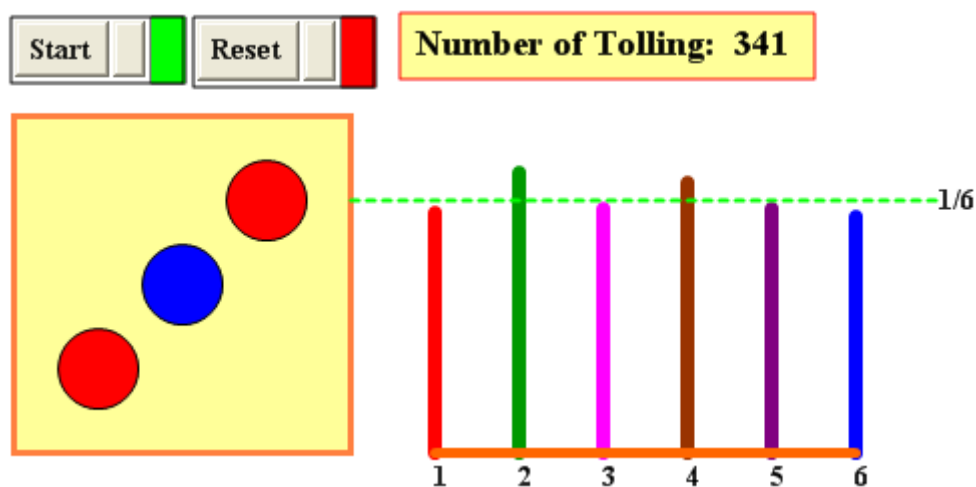


图 3：模拟实验

(3)若掌握了一款数学软件能够切实有效地减轻他们的工作负担、节省他们的工作时间、提高他们的工作效率，则大部分数学老师还是愿意花时间去掌握数学软件。虽然一般的动态几何软件在很多方面（例如运动、测量、变换等）比人工动手操作更加高效，但是它们在处理另外一些常见问题时却还不够简便，甚至在有些方面还比传统教学方式更加费时和繁琐。下面随便举几个简单的例子：

①一般的动态几何软件对于构造有些常见的、基本的几何图形还不足够简便，例如等腰三角形、平行四边形、矩形、梯形等等。而教师和学生课堂上没有时间花费在画这些基本

图形上面。

②为了画如图 4 所示的图形，我们一般要超过 30 个步骤的操作才能完成（见[6]）。动态几何软件能否像构造线段的中点那样，直接并容易地构造垂线段和垂足呢？

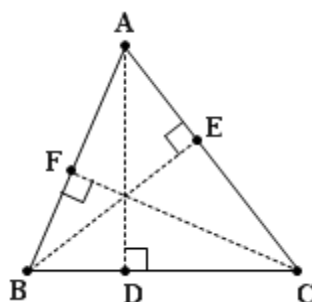


图 4：三角形的三条高线

③当学生掌握了三角形的重心、外心、垂心等作图方法之后，就没必要每次都在计算机上重新构造这些点。若能够将三角形的垂心、三角形的外心、三角形的重心等命令增加到作图菜单中，那么学生和教师就可以节约大量机械性、重复性的劳动，而将更多的时间和精力投入到有意义的工作中去。

④很多动态几何软件都具有用户自定义工具的功能，这允许用户能够自己定义类似于三角形的外接圆这种工具。但是，对于大部分用户来说，使用这个功能本身就很困难，而他们更加习惯软件自带的工具和命令。

⑤为了帮助学生对问题的理解，数学教师往往需要用不同的符号对具有相似或全等关系的图形中对应的几何对象进行标注，如图 5 所示。可惜绝大多数动态几何软件处理这些工作

相当繁琐，远不如传统教学手段快捷、简便。

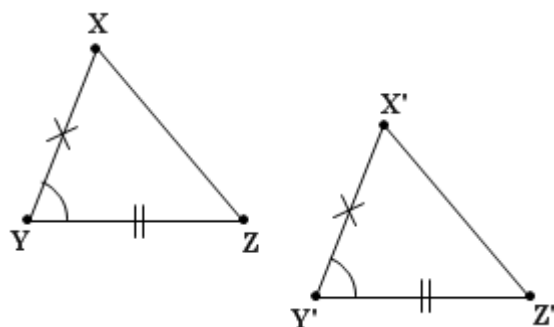


图 5：全等三角形中的标注

⑥很多时候，用户总希望能够直接构造可以被拖动的坐标点，但是在这方面很多动态几何软件都比我们期望的要复杂。下面的问题就是一例：

线段 AB 的两个端点 A、B 分别在 x 轴、y 轴上滑动，并且 AB 的长度保持为定长 5 不变。当点 A、点 B 滑动过程中，线段 AB 扫描过的区域是什么形状的图形？我们知道，坐标点 $(5\cos(t), 0)$ 、 $(0, 5\sin(t))$ 满足线段 AB 的要求。可惜，在一般的动态几何软件中需要 10 多个步骤才能完成对这两个坐标点的构造（见[7]）。

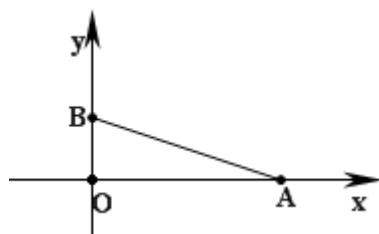


图 6：长度为定值的线段 AB

⑦遗憾的是，很多动态几何软件不能直接构造圆锥曲线，而圆锥曲线只能以点的轨迹的形式出现。这种形式的圆锥曲线对进一步的操作有很多限制，例如不能直接作出它与某条直线的交点，例如图 7 所示的问题：点 P 是方程 $x^2/9+y^2/4=1$ 对应椭圆上的一点，直线 m 经过点 P 并且垂直于椭圆经过点 P 的切线。当点在椭圆上运动时，探索 PQ 的中点 M 的轨迹。

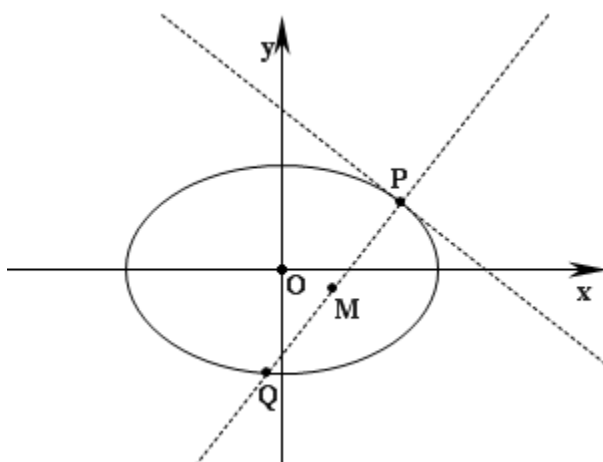


图 7：直线和椭圆的交点

抛物线、椭圆和双曲线是中学阶段的重要课程内容，若动态几何软件将圆锥曲线的几种常见构造方式以菜单命令的形式出现，那么将给教师和学生带来更多的方便。

值得一提的是，GeoGebra 可以通过函数命令的方式构造圆锥曲线，但一般的教师和学生更加熟悉可视化的操作方式。

基于以上这些情况，我们就能理解一般的动态几何软件在中国地区使用率低、应用不够深入以及大部分数学教师在日常教学活动中缺少使用计算机热情的原因。如果数学教师不能

把信息技术有效地运用于数学教学活动，学生也难以利用信息技术进行有效的数学学习，因此中国地区的大部分学生失去了信息技术帮助下的更好地学习数学的机会。

2 什么样的软件才能更加适合中国的数学教育？

数学软件应该让绝大多数数学教师和学生成为教育信息化的受益者。

既然应试教育目前无法暂时改变，我们应该考虑改变数学软件自身，从而改善信息技术在数学教育中的应用水平和普及程度。

动态几何软件可让数学变得更直观、更形象、更有趣，有助于加深学生对数学概念的理解，提高学生对数学学习的兴趣和积极性。与此同时，还应该做到操作简便、易学易用，能够方便地处理数学课程的绝大部分内容。还应该考虑到最大限度地节约教师的时间，减轻他们的负担，提高他们的课堂教学效率。只有工作负担减轻了，效率提高了，数学教师们才会更加有时间和热情去学习和运用数学教育软件。

数学软件如何才能更加操作简便、易学易用？如何才能更加有效地减轻教师的工作负担，提高他们的工作效率呢？

我们知道，数学课堂教学需要在固定的时间内完成各种各样的工作：画图、计算、书写公式等等。那么为教学服务的数学软件，应该考虑到数学教师在日常教学工作中的方方面面。因此：

(1) 首先，应该重视教师的教学传统，认真考虑和总结传统教学过程中各种各样要处理的工作，发挥传统教学手段的优势。

(2) 为更大程度上满足数学教学、数学学习和数学研究的需求, 数学教育软件应该针对某个学段(例如小学、中学或大学)而设计和开发, 充分考虑该学段所包含的所有知识模块以及各种知识的构建与呈现方式。

例如为中国的中学阶段所设计的数学教育软件应考虑到的知识模块就需要包括: 平面几何、解析几何、立体几何、数与代数、三角函数、导数与积分、统计与概率、算法与编程等等。

(3) 软件的入门尽可能容易, 操作尽可能简单。让初学者能迅速掌握软件的基本操作。熟悉了软件的基本操作之后, 就能够轻松地开发出满足自己日常课堂教学所需要的资源。

优秀的软件, 应该让用户通过简单的操作就能实现自己的意图, 而不是需要通过许多难以捉摸的技巧。尤其是对于工作负担重的中国教师群体来说, 更是如此。

3 数学教育软件在中国的发展与应用

自 1996 年起, 在中国地区以张景中教授为首的科学家们为开发出更加适合中国实际情况的数学教育软件做出了不懈的努力。十几年来不断广泛听取一线教师对数学软件的使用意见和建议, 对数学教育软件不断升级和改善。

他们的最新研发成果叫做 Z+Z 智能教育平台《超级画板》(SuperSketchPad, SSP)。曾在 1998 年发表并在 1999 年的第四届亚洲数学技术大会上展示的《数学实验室》可以说是《超级画板》的前期版本。

3.1 超级画板是什么?

超级画板是为中国地区中学阶段的数学教育所设计和开发的动态数学平台。它包含了处理几何、代数、三角、微积分、概率统计、算法编程等知识领域的功能模块。可以说它是一个：

动态几何软件+计算机代数系统+随机实验模拟系统+几何定理推理机器+程序编写环境.....

下面简单介绍超级画板的一些基本功能和特色：

(1) 在超级画板中，我们可以快速、直接地画出绝大多数常见的几何图形，就像拿着粉笔在黑板上画图一样方便和简单。例如，使用画笔工具，我们可以直接画出下面这个图形(图8)，不需要其他的任何工具和菜单命令。

AB 和 DE 分别是圆 C 两条垂直的直径，点 F 是圆 C 上的任意点， $FG \perp AB$ ， $FH \perp DE$ 。

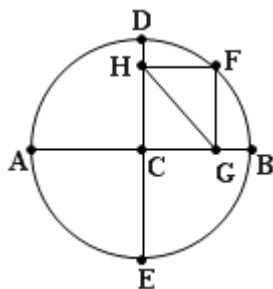


图 8：梯子滑动模型

(2) 在超级画板中，我们可以直接作出带有参数的坐标点和方程曲线，作图的同时对应的参数也被自动创建。

例如，我们可以直接作出坐标点 $A(5\cos(t), 0)$ 和点 $B(0, 5\sin(t))$ ，然后轻松地拖动它们。再例如我们可以在超级画板中直接输入下面的方程，即可画出对应的曲线。

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3(t) \\ y = a \cdot \sin^3(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

(3) 在超级画板中，对于直线上的点、圆上的点、圆锥曲线上的点以及其他曲线上的点，系统给自动分配一个变量来表示它的属性。由此我们可以方便、精确地控制这些点的位置和运动方式。

例如，在图 9 中，点 B 是圆 O 上的任意点，我们可以通过动画按钮精确地移动点 B 的位置，例如可以使得角 AOB 的大小为 $\pi/6$ 、 $\pi/3$ 、 $\pi/4$ 、1、2.1，等等。

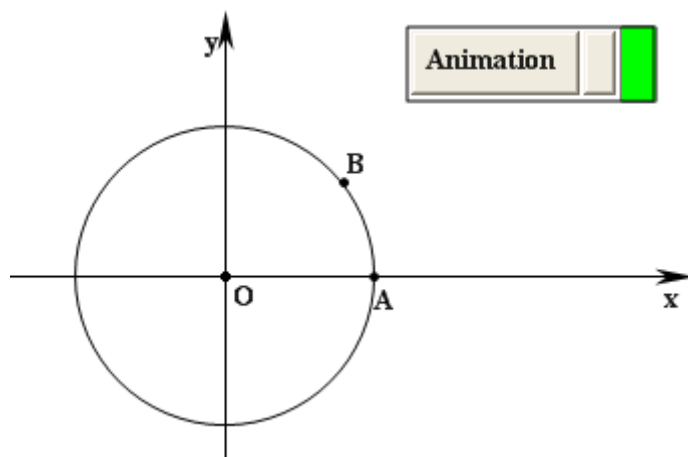


图 9：圆上的点

(4) 在超级画板中可以直接作出圆锥曲线，并且具有 10 多种构造方式供用户选择。

例如我们可以通过菜单命令直接构造出以点 A 和点 B 为焦点并经过点 C 的椭圆。

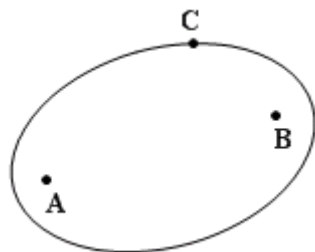


图 10：已知两焦点并过定点的椭圆

(5) 在超级画板中，我们可以直接构造由多个主动点驱动下的轨迹。例如下面的问题：

点 C、点 F、点 I 分别在圆 A、圆 D、圆 G 上，点 J 在线段 CF 上，点 K 在线段 IJ 上，如图 11。当点 C、点 F、点 I 分别在各自的圆上按照不同的方式运动时，点 K 的轨迹是什么图形？

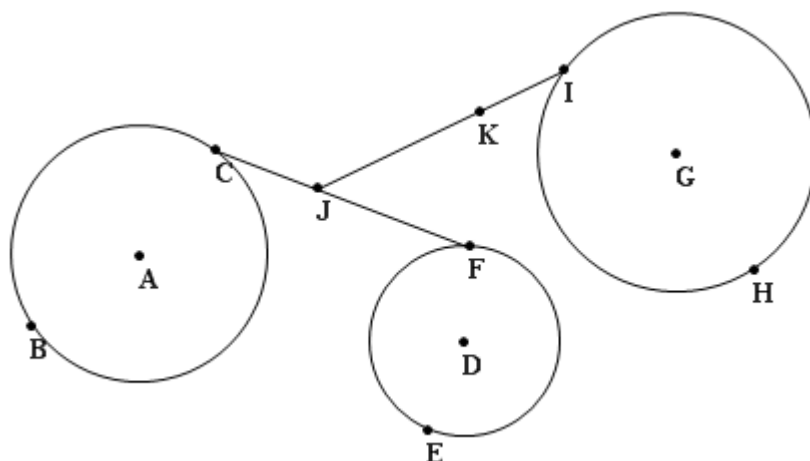


图 11：分别在三个不同圆上的点

下图就是使用超级画板构造出的点 K 的轨迹图形的一部分：

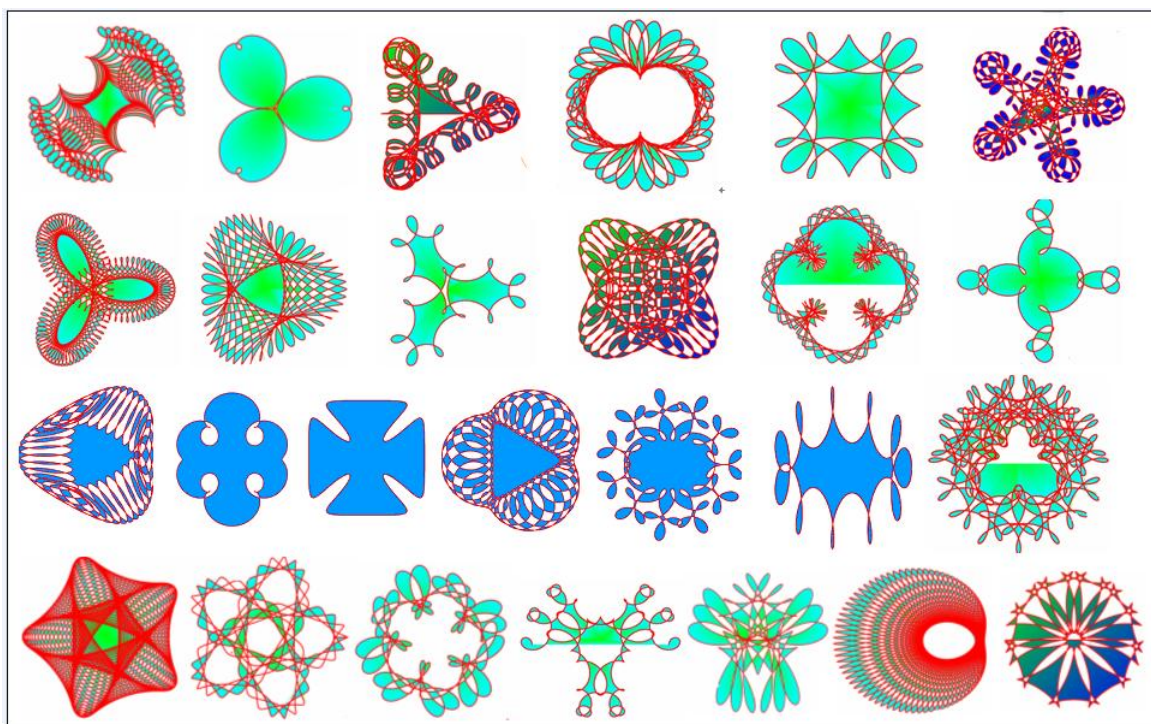


图 12：点 K 的轨迹

(6) 超级画板是一个平面几何自动推理系统

下面是来自初中数学教科书 (见[9]) 中的一个问题。

点 O 是平行四边形 ABCD 两条对角线 AC , BD 的交点 , 且 $AE \perp BD$, $CF \perp BD$, 垂足分别为 E , F。求证 : $AE=CF$ 。

在超级画板中画出上述图形之后 , 单击“自动推理”命令 , 在 2 秒钟之后推理结束 , 如图

13 所示可以看到所推导的结论： $AE=CF$ 。

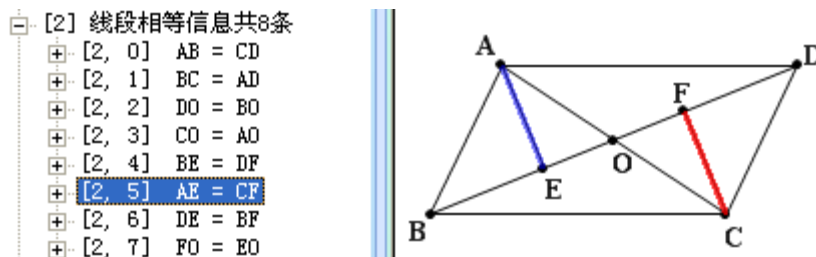


图 13：展示相等的线段 AE 和 CF

如何才能证明 $AE=CF$ 成立呢？我们可以打开该信息前面的+，查看推导出该结论的依据，如图 14 所示，计算机告诉我们： $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ 。

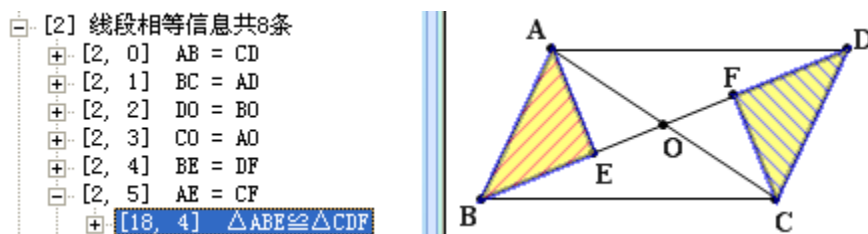


图 14：展示全等的三角形 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CDF$

而又如何才能证明 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ 成立呢？继续打开该信息前的+，查看推导出该结论的依据，如图 15 所示；直到用户已经明白或者到达已知条件为止，如图 17 所示。

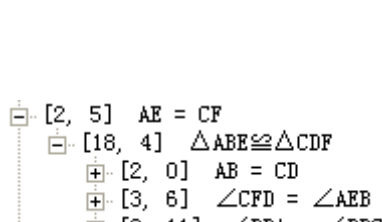


图 15：推导过程

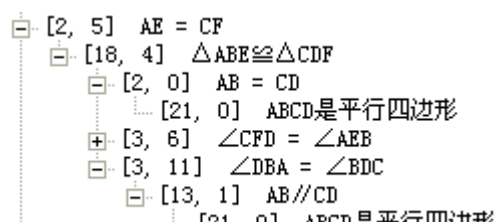


图 16：推导过程

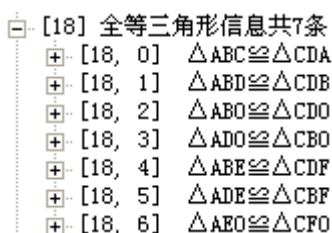


图 17：全等的三角形信息

这就是超级画板的平面几何推理功能，它将作图过程中的几何关系自动记录下来，然后根据内置的推理规则（数学课程中的基本定义和定理）进行推理。

在图 13 中可以看到，除了 $AE=CF$ 之外，在推理库中计算机共推导出了图形中的 8 对相等的线段。

另外还有许多结论性的信息，包括相等角、垂直、平行、全等三角形、相似三角形等等。例如全等三角形的信息就有 7 条，如图 17 所示。

值得一提的是，用户还可以自己动手添加辅助条件或者设置推理规则，这可以让计算机按照用户的指示进行证明和计算。

(7) 超级画板的代数工作区同时也是一个编程环境。下面我们通过一个实例了解它这方

面的功能：

问题：函数 $y=a^x$ 的图像与它的反函数的图像有多少个交点？

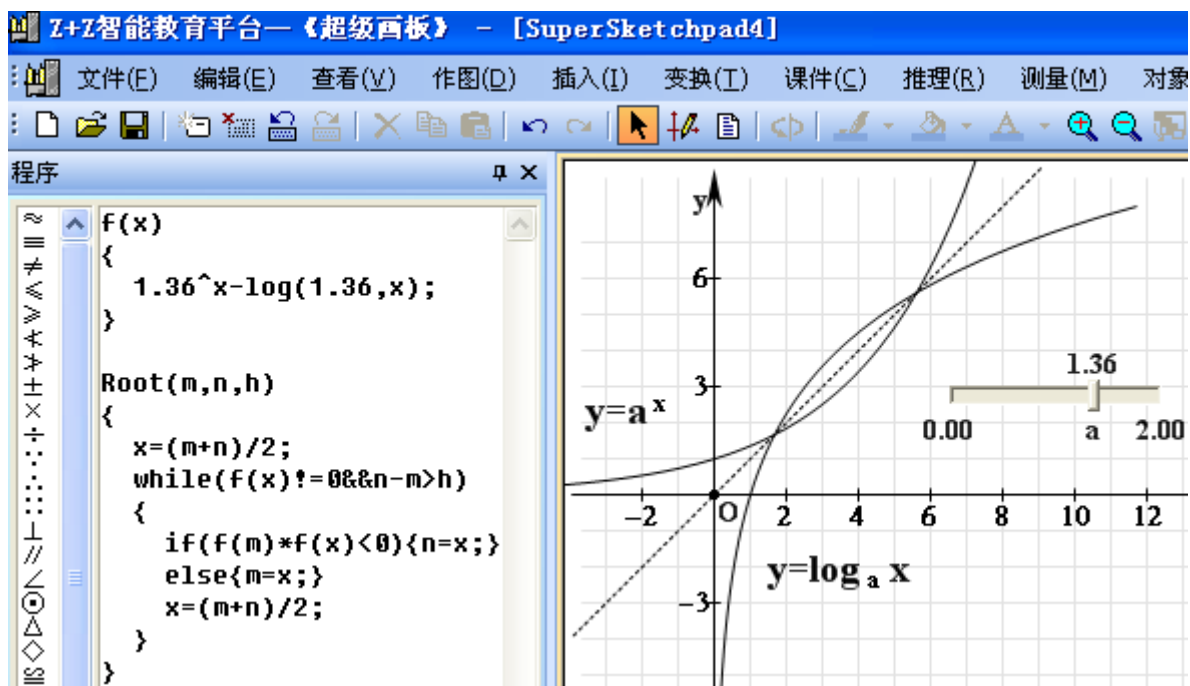


图 18：作图工作区和编程环境

假定 $a = 1.36$ ，我们首先将函数 $f(x)$ 定义为 $f(x)=1.36^x-\log(1.36,x)$ ，然后定义在区间 $[a, b]$ 上求近似解的二分法函数 $\text{Root}(a,b,h)$ ，其中 h 是近似解的精确度。

通过观察可知一个解在区间 $[1, 2]$ 上，另一个在 $[4, 8]$ 之间，因此在执行了程序的命令 $\text{Root}(1,2,0.001)$ 和 $\text{Root}(4,8,0.001)$ 之后即可求得精确度为 0.001 的两个近似解。

(8) 在超级画板中我们可以让计算机模拟随机事件，例如抛硬币、掷骰子等等。图 19 所示就是利用超级画板开发的用来估计圆周率 π 的值的动态模拟实验。

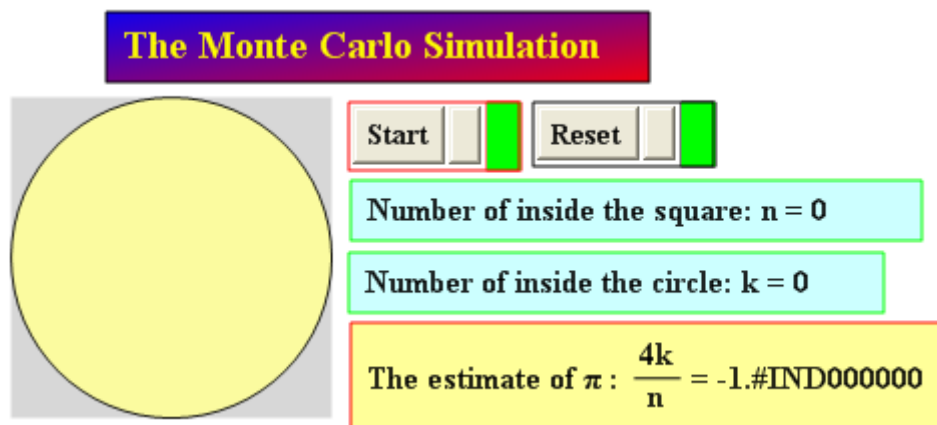


图 19：估计圆周率的随机实验

单击“Start”按钮就开始进行 1000 次随机实验，同时即时记录实验的过程，如图 20、21 分别为实验进行中和实验结束后的状态。

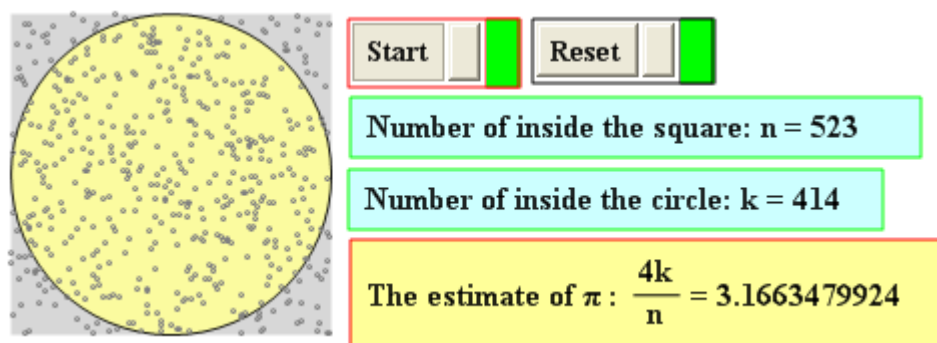


图 20：实验过程中

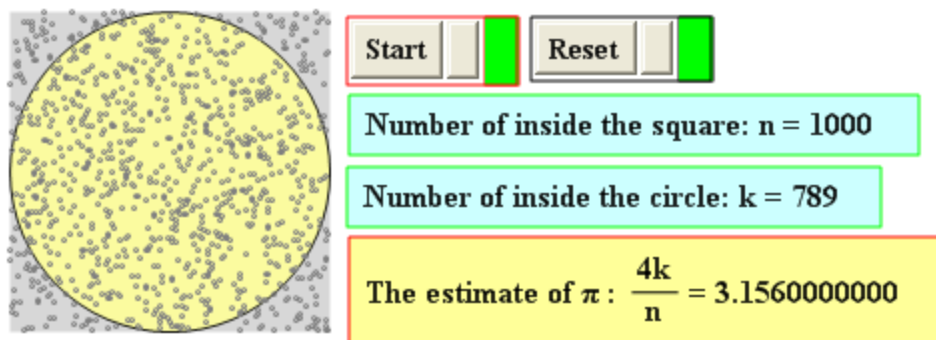


图 21 : 实验结果

单击“Reset”按钮就可以返回到初始状态。再次单击“Start”按钮，则可以进行另外的 1000 次实验。

通过“Start”按钮的属性值可以修改每组实验的次数，例如修改为 2000，则单击“Start”按钮后，会每次会进行 2000 次的实验。

3.3 超级画板在中国的应用

为了帮助数学教师更加有效地将信息技术运用于数学教学的各个环节，中国教育部在 2003 年启动了“Z+Z 智能教育平台（超级画板）运用于国家数学课程改革的实验研究”项目。随后超级画板作为引导学生开展数学活动的工具被整合进入数学新课程教材。该项目的委员会成员包括数学教师、数学教育专家、数学家、课程设计者、教材开发者以及数学教育软件专家。

在该项目的前两年有 117 间中学参加了实验工作，到现在为止超级画板已经在上千家学校得到了应用。书[10]和[11]收集了大量运用超级画板进行数学教学、数学研究和数学学习的

案例。

下面是从书[10]中摘录的一些学生利用超级画板进行数学学习的感受,以及数学教师将超级画板运用于数学教学的心得体会。

(1)学生使用SSP之后的感受

★北大附中的胡文欣同学曾经写道：“我发现 SSP 挺有趣的，一向仇视数学的我竟开始有些喜欢几何了。当第一次看见自己在 SSP 里做出的五角星发生旋转、移动、变色等等各种美妙的变化时，我告诉自己：我不是差生，不是数学差生。后来一次，我的数学测验头一回及格，乐死我了！在 SSP 的魔法下，我竟发现，数学中的丑小鸭渐渐在变。我不是差生，我会变成天鹅！”

★北大附中的另一位同学刘舜同学在学习心得中写道：“使用 SSP 进行学习已经快一年了，我觉得 SSP 非常好，它不仅丰富了我的课外生活，使我的学习生活变得多姿多彩，而且激发了我学习数学的兴趣，提高了我的数学成绩，巩固了我的数学学习效果。一开始用 SSP 的时候，我就觉得这个软件十分有趣，点几个点就做个圆，再做几个图形，就能做出一些很好看的动画。因此，我用的这个软件越多，对它就产生越丰厚的感情，简直“不能自拔”，如果一个星期不用这个软件，心里就不舒服，总觉得缺点什么。要把这个软件用得更好，就要不断地学习新知识，才能使我的技术不断提升……在学习过程中，我和同学相互讨论、研究，不知不觉中，数学成绩和电脑技术都提高了。SSP 是我的朋友，陪伴着我进步。”

(2)数学教师使用 SSP 的体会

★北大附中广州实验学校的王明宇老师说：“将 SSP 用于数学教学，不仅能够培养学生自

主学习、探究学习和合作学习的习惯，而且还能促进教师教学水平的提高。同学对 SSP 产生了浓厚的兴趣，许多同学因此喜欢上了数学。...SSP 小组的活动占据了学生一些课余学习时间，特别是有些着迷的同学节假日在还家里琢磨课件。有人觉得这会象玩游戏一样影响了他们的学习。但事实证明，那些在 SSP 中取得成果的学生的数学成绩同样名列前茅。”

★湖北省宜昌市第九中学成凯老师说：“SSP 在课堂教学中的作用主要表现在：第一，提高了教学工作效率。第二，真切展示知识的表现环境。...过去许多可以想到而做不到的事，现在可以演示、操作了。第三，有助于更好地开发学生的思维。...有效地培养了学生的空间想象能力与逻辑思维能力。第四，丰富了教与学的手段，充分调动了师生的积极性。...充分提高了广大学生学习数学知识和信息技术的兴趣。”

★济南市教研室曾美露、周生伟老师说：“SSP 的引入，已对我们的课堂教学、教师理念及教学方式和学生学习方式的转变，产生了很大的影响。.... SSP 制作课件一般只需 3 至 5 分钟，有些可以随堂制作的课件能在一分钟内完成，这既能节约教师做课件的时间，又能让学生在课堂上领略和经历数学现象产生的全过程。SSP 操作的方便和数学化设计为课堂上教师与学生的整合创造了良好的环境，当堂制作课件，把教师和学生拉到同一条认识的起跑线上，拉近了教师、学生、教材之间的距离，为实现课堂中的三个要素的整合提供了可能性。”

超级画板让数学教师节约了时间，减轻了负担，这样一来非常积极地将信息技术运用于日常的教学工作中。当他们享受到信息技术所带来的有益帮助和正面作用时，就会更加有热情地地钻研软件技术以及探索数学教育软件在数学教学、数学学习、数学研究中的应用。

3.4 今后需要进一步完善的工作

作为为中国数学教师所开发的第一款动态数学软件，超级画板仍然有许多待改进之处。

例如：

(1) 通过坐标 $(\cos(t), \sin(t))$ 所作出的点，在拖动过程中，鼠标不能很好地控制点的运动方向或位置。而直接在圆上取得的点则不存在这个问题。

(2) SSP 可以直接作出带参数的方程 $y=x^2+(2m+1)*x+m^2-1$ 对应的曲线，当 m 变化时却不能直接构造抛物线的顶点或者焦点的轨迹。

(3) 没有设计直接构造两条圆锥曲线的交点的功能，这在中学阶段是有时会需要。

(4) 为了为初中数学教学提供更大的方便，建议增加通过三个点构造抛物线的命令，当然事先要判断三个点的位置关系。

4. 总结

因为不同国家或地区在教育方面的传统与现状有很大差异，所以对于一个国家或地区来说，固然需要引进其他国家或地区的优秀教育软件，而开发更加适合本国或本地区实际情况的教育软件更加重要。

5. 参考文献

1. Nicholas Jackiw ,*The Geometer's Sketchpad* ,Key Curriculum Press ,Berkeley ,1991–1995。

2. Jean-Marie Laborde, Franck Bellemain ,*Cabri-Geometry II* ,Texas Instruments ,1993–1998。
3. Markus Hohenwarter, Yves Kreis、 Michael Borchers ,*GeoGebra* ,GeoGebra Inc ,Boca Raton , 2001-2008。
4. Website at: <http://www.qiusir.com/gsp>。
5. Website at: <http://222.92.23.119/forum/forumdisplay.php?f=11>。
6. 陶维林 , *几何画板实用范例教程* , 清华大学出版社 , 北京 , 2003。
7. 屈清明、季久峰 ,*几何画板数学课件制作范例教程* ,人民邮电出版社 ,北京 ,2004(96-100页)。
8. 陶维林 , *用几何画板教平面解析几何* , 清华大学出版社 , 北京 , 2001 (92-127 页)。
9. 马复 , *新课程初中数学教科书 (九年级上册)* , 北京师范大学出版社 , 北京 , 2003(77页)。
10. 王鹏远、马复 , *超级画板与数学新课程* , 科学出版社 , 北京 , 2005。
11. 曾美露 , *超级画板支持下的初中数学单元复习教学设计* , 山东教育出版社 , 济南 , 2005。